$*\int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x=0$ et $x=1$

$*\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx = \int_0^{f(1)} f^{-1}(x)dx$

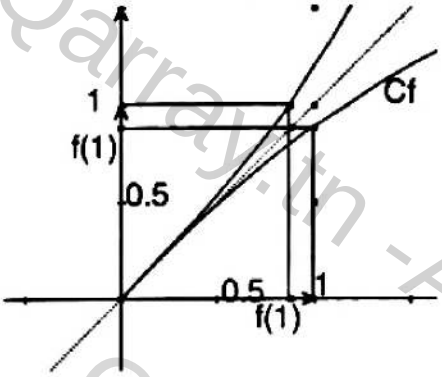
Représente l'aire de la partie du plan limitée par $(Cf-1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation :
$x=0$ et $x=f(1)$

D'où

$$\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx = 1.f(1) - \int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$

$$= Ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(Ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}-1$$



EX 23 :

$$I_p = \int_1^e x^2 (Lnx)^p dx \; ; \; p \geq 1$$

1)

a) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx$

pour $1 \leq x \leq e$

$\Rightarrow 0 \leq Lnx \leq 1$

$\Rightarrow x^2 (Lnx)^{p+1} \leq x^2 (Lnx)^p$

$\Rightarrow \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx \leq \int_1^e x^2 (Lnx)^p dx$

$\Rightarrow I_{p+1} \leq I_p$

D'où (I_p) est décroissante.

b) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx$

soit :

$$\begin{cases} U'(x) = x^2 \rightarrow U(x) = \dfrac{x^3}{3} \\ V(x) = (Lnx)^{p+1} \rightarrow V'(x) = \dfrac{p+1}{x}(Lnx)^p \end{cases}$$

$$I_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3}(Lnx)^{p+1}\right]_1^e - \frac{p+1}{3}.\int_1^e x^2 (Lnx)^p dx$$

$$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3}.I_p$$

D'où :

$$I_{p+1} + \frac{p+1}{3}.I_p = \frac{e^3}{3}$$

c) $I_1 = \int_1^e x^2.Lnx\, dx$

$x^2 \xrightarrow{p} \dfrac{x^3}{3}$

$Lnx \xrightarrow{d} \dfrac{1}{x}$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3}Lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx$$

$$I_1 = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{9}\left(1+2e^3\right)}$$

$$*I_2 + \frac{2}{3}I_1 = \frac{e^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{1}{27}\left(5e^3-2\right)}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn